Ejercicio 5 de la extraordinaria 17/18. Sea f: $P_2(\mathbb{Z}_2) \to P_3(\mathbb{Z}_2)$ la aplicación dada por

$$f(a + b x + c x^2) = a(1+ x^3) + b x^2$$

a) Calcular la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas.

b) Calcular dimensión, base, ecuaciones paramétricas e implícitas de Ker(f) e Im(f).

c) ¿Es f un isomorfismo? Razonar la respuesta.

d) Calcular, si es posible, un espacio vectorial isomorfo a $P_2(\mathbb{Z}_2)$ (distinto de él). En caso afirmativo, definir explícitamente un isomorfismo entre ellos y calcular la imagen de 1 + x.

a) Recordar que las bases canónicas de estos espacios vienen dadas por las distintas potencias de x, a saber: $B = \{1, x, x^2\}$ es la base de $P_2(\mathbb{Z}_2)$ y $B' = \{1, x, x^2, x^3\}$ es la base de $P_3(\mathbb{Z}_2)$. Para calcular la matriz asociada a f con respecto a estas base primero tengo que calcular la imagen de cada uno de los vectores de la base B:

$$f(1) = f(1 + 0x + 0x^2) = 1.(1+ x^3) + 0.x^2 = 1+ x^3$$

$$f(x) = f(0 + 1.x + 0x^2) = 0.(1+ x^3) + 1.x^2 = x^2$$

$$f(x^2) = f(0 + 0x + 1.x^2) = 0.(1+ x^3) + 0.x^2 = 0$$

Ahora necesitamos las coordenadas en la base B' de estas imágenes,

$$1+ x^3 = (1, 0, 0, 1)_{B'}$$

$$x^2 = (0, 0, 1, 0)_{B'}$$

$$0 = (0, 0, 0, 0)_{B'}$$

y como B' es la base canónica, estas coinciden con los coeficientes de tales polinomios:

Ahora la matriz asociada será aquella cuyas columnas son las coordenadas en B' de tales imágenes

$$M_{B,B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Para calcular las bases de Ker(f) e Im(f), vamos a obtener la forma normal de Hermite por columnas de la matriz que se obtiene añadiendo, a la matriz A obtenida en el apartado a), y debajo matriz identidad:

$$\begin{pmatrix} A \\ Id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos observar que A ya es escalonada y reducida por columnas, por tanto no tenemos que hacer ninguna trasformación.

Ahora las columnas de A no nulas serán las coordenadas de los vectores de la base de la imagen de f y la columna que encontramos debajo de la columnas de ceros de A será las coordenadas del vector que forma la base del núcleo de f:

$B_{Im(f)} = \{(1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\} = \{1 + x^3, x^2\}$

$B_{Ker(f)} = \{(0, 0, 1)\} = \{x^2\}$

Contando los vectores estas base obtenemos la dimensión, luego, dim(Im(f)) = 2 y dim(Ker(f)) = 1

Las ecuaciones paramétricas se obtienen multiplicando cada uno de los vectores de la base por un parámetro distinto e igualándolo a las coordenadas de un vector genérico de dicho cada espacio vectorial

Im(f)

$$\left.\begin{array}{l} a = \lambda \\ b = 0 \\ c = \mu \\ d = \lambda \end{array}\right\}$$

Ker(f)

$$\left.\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \\ c = \lambda \end{array}\right\}$$

c) f no puede ser un isomorfismo pues los espacios vectoriales $P_2(\mathbb{Z}_2)$ y $P_3(\mathbb{Z}_2)$ no tienen la misma dimensión. Además hemos visto que el núcleo no es cero (no es inyectiva), ni la imagen tiene igual dimensión que el codominio (no es sobreyectiva).

d) Un espacio vectorial isomorfo a $P_2(\mathbb{Z}_2)$ será otro de igual dimensión, por ejemplo, $(\mathbb{Z}_2)^3$ y un isomorfismo se podría definir asignado a cada polinomio sus coordenadas, es decir:

$f: P_2(\mathbb{Z}_2) \to (\mathbb{Z}_2)^3$ definido por $f(a + b\,x + c\,x^2) = (a, b, c)$

$f: P_2(\mathbb{Z}_2) \to (\mathbb{Z}_2)^3$ definido por $f(a + b\,x + c\,x^2) = (a, b, c)$

Así , $f(1 + x) = (1, 1, 0)$